

Т. Г. Раутиан, Л. С. Самойлова

К ОБОСНОВАНИЮ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПЛОТНОСТИ ЭНЕРГИИ МЕТОДОМ АППРОКСИМАЦИИ СЕЙСМОГРАММ ОТРЕЗКАМИ СИНУСОИД

Показано, что разница между действительной энергией колебания и энергией, вычисленной методом аппроксимации отрезками синусоид, лежит в пределах допустимой погрешности (10—30%).

При решении некоторых вопросов, связанных с изучением динамики распространения сейсмических волн и их затухания, и при проведении энергетической классификации землетрясений необходимо определять плотность энергии по сейсмограммам. Задача состоит в вычислении интеграла,

$$\mathcal{E} = \int \left(\frac{du}{dt} \right)^2 dt, \quad (4)$$

равного (с точностью до постоянных множителей) плотности энергии.

Голицын (1960) предложил определять эту величину, заменяя отдельные участки сейсмограммы отрезками синусоид и вычисляя энергию для каждого из них, как $(A/T)^2 \tau$, где A — амплитуда, T — период и τ — длительность соответствующих участков. Для поверхностных волн удаленных землетрясений, имеющих правильный характер, мало отличающийся от синусоиды, правомочность такого представления не вызывает сомнения. Что же касается объемных волн при близких землетрясениях, запись которых имеет очень сложную форму, то для них применение этого метода сталкивается с определенными трудностями. Действительно, отсутствие обоснованных приемов замены записи отрезками синусоид, с одной стороны, оставляло простор для субъективных ошибок интерпретаторов, а с другой стороны, вызывало сомнение в правомочности применения самого способа к записям сложной формы. Этими сомнениями в некоторой степени объясняется и то внимание, которое было уделено разработке способов инструментального интегрирования сейсмограмм.

Так был предложен энергометр (Белотелов и др., 1959), который позволяет проводить интегрирование по обычным сейсмограммам, а также установки, которые можно назвать энергографами. Они позволяют записывать на сейсмограмму непосредственно энергетические величины (Феофилактов, 1961) или, по системе накопления, интеграл от вектора Умова по времени от начала некоторого участка колебаний до текущего верхнего

предела (Рыков, 1959). Однако инструментальные методы определения плотности энергии пока еще не получили широкого распространения. Вычисления плотности энергии в практике сейсмологических наблюдений ведется во многих случаях путем визуальной аппроксимации сейсмограмм отрезками синусоид. Применительно к объемным волнам P и S это оказывается довольно сложной задачей.

Особенно характерным для записей является их «негладкий» характер, т. е. существование относительных минимумов, расположенных выше нулевой линии, и относительных максимумов, лежащих ниже ее. В процессе разработки методов энергетической классификации землетрясений в КСЭ были предложены практические приемы разложения негладких записей на «гладкие» составляющие и способы измерения их средних амплитуд и периодов (Нерсесов и др., 1961).

Мы ставим здесь целью показать, что если гладкую квазипериодическую функцию с меняющимися во времени «периодом» и «амплитудой» аппроксимировать синусоидой, период и амплитуда которой равны средним значениям соответствующих величин для этой функции, то энергия при этом изменится очень мало. Иначе говоря, покажем, что погрешность в определении энергии за счет самого факта аппроксимации невелика. Очевидно, что для сложных, негладких колебаний это будет справедливым, поскольку такое негладкое колебание всегда можно приближенно разложить на гладкие составляющие (см. фиг. 2, б).

Количественную оценку величины ошибки в энергии за счет аппроксимации удобнее всего провести на нескольких примерах.

Сначала выберем несколько теоретических функций с известным спектром, близких по характеру к реальным сейсмограммам. Значения относительных ошибок в энергии получим путем сопоставления энергии аппроксимирующей синусоиды

$$\mathcal{E} = 2\pi^2 \left(\frac{A}{T}\right)^2 \tau \quad (2)$$

и энергии самой функции.

Рассмотрим следующие теоретические кривые: пятую производную колокольного импульса, напоминающую по форме сейсмограмму в момент вступления какой-либо фазы (фиг. 1, а); синусоиду, амплитуда которой затухает по экспоненциальному закону (фиг. 1, б), и, наконец, кривую синусоидального типа с постоянной амплитудой, частота которой линейно меняется со временем (фиг. 1, в).

Функции, изображенные на фиг. 1, а и 1, б, имеют следующие аналитические выражения соответственно:

$$u_1(t) = (e^{-t^2})^V = -120te^{-t^2} + 160t^3e^{-t^2} - 32t^5e^{-t^2}, \quad (3)$$

$$u_2(t) = \sin \omega_1 t e^{-\alpha t}. \quad (4)$$

Подсчитаем для них \mathcal{E} по формуле (2), как энергию аппроксимирующей синусоиды, амплитуда и период которой равны средним значениям A и T для самих функций. Энергию истинной функции вычислим с помощью теоремы Рейли

$$\mathcal{E}_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \Phi^2(\omega) d\omega,$$

где $f(t)$ — некоторая функция, а $\Phi(\omega)$ — модуль ее спектра. В нашем случае $f(t)$ имеет смысл скорости колебаний

$$f(t) = \frac{du}{dt},$$

и, значит, $\Phi(\omega)$ должно иметь смысл спектра скорости колебаний, равного произведению спектра смещения $S(\omega)$ на круговую частоту ω . Следовательно, формула Рейли принимает вид

$$\mathcal{E}_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{du}{dt}\right)^2 dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \omega^2 S^2(\omega) d\omega, \quad (5)$$

где $S(\omega)$ — спектр смещения на графике теоретической функции, изображающей сейсмограмму. Спектры производной колокольного импульса и затухающей синусоиды известны из теории (Харкевич, 1952) и имеют вид:

$$S_1(\omega) = \sqrt{\pi} \omega^5 e^{-\frac{\omega^2}{4}}; \quad S_2(\omega) = \frac{\sqrt{\omega_1^2(\alpha^2 - \omega^2 + \omega_1^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2\omega_1^2}}{(\alpha^2 - \omega^2 + \omega_1^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}.$$

Интеграл (5) для этих двух спектров вычислялся графически, путем определения площади, заключенной между осью абсцисс (осью ω) и кривой «энергетического спектра» $\omega^2 S^2(\omega)$. Верхний бесконечный предел интегрирования заменялся величиной ω_{\max} , при которой спектральная функция уменьшалась до значений, не превышающих 1% от максимальной величины. Соответствующие данные приведены в табл. 1.

Таблица 1

Сопоставление энергии колебаний, вычисленной теоретически и путем аппроксимации для гладких колебательных движений (фиг. 1, а и 1, б)

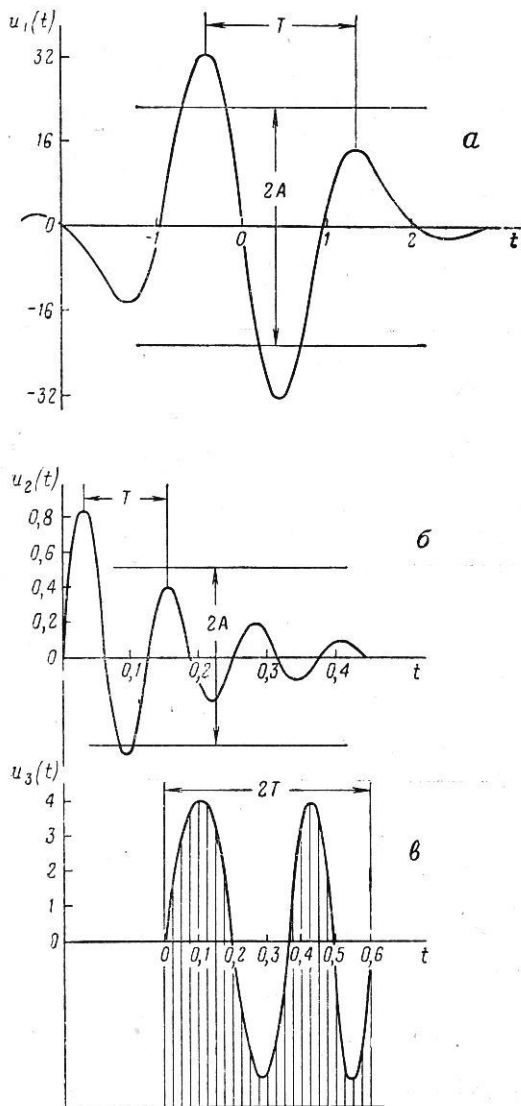
Кривая	\mathcal{E}_1	Аппроксимация				$\mathcal{E}/\mathcal{E}_1$
		A	T	τ	ξ	
Фиг. 1, а	1 400	24,8	1,8	4,0	1 510	1,08
Фиг. 1, б	126	0,51	0,125	0,3	111	0,88

Для второй группы примеров проводилось сопоставление энергии, вычисленной для аппроксимирующих отрезков синусоид, с энергией функций, разложенных на гармонические составляющие аналитическим методом (Смирнов, 1953; Уиттекер, Робинсон, 1933). К этой группе относятся синусоида, модулированная по частоте (фиг. 1, в), и три небольшой длительности отрезка сейсмограмм (фиг. 2). Гармонический анализ проводился способом 24 ординат, и разлагаемая функция описывалась тригонометрическим рядом

$$u(t) = r_0 + r_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + r_2 \sin(2\omega t + \alpha_2) + \dots,$$

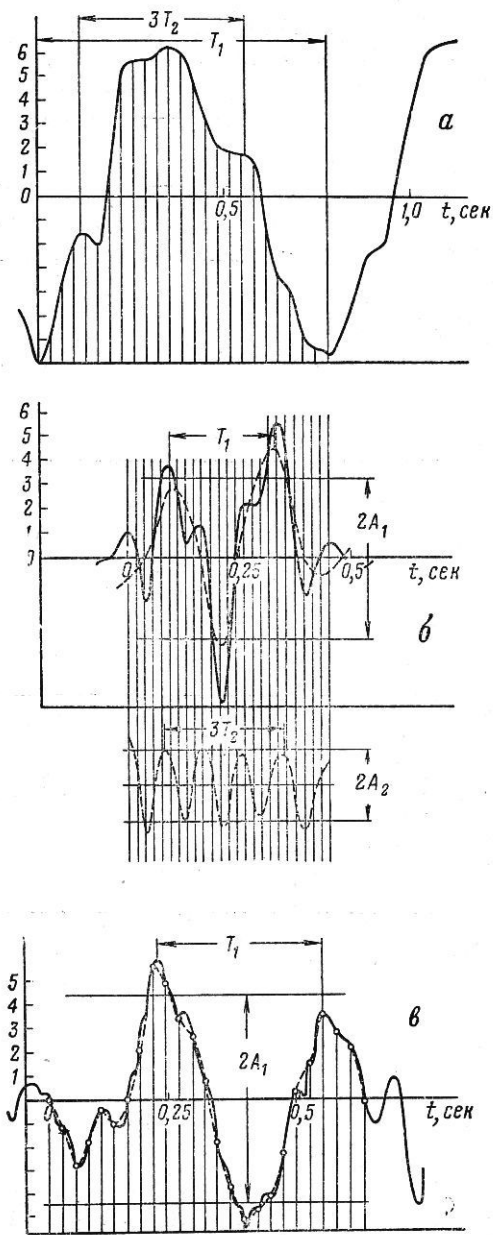
где r_k и α_k — амплитуды и начальные фазы гармоник, $\omega = 2\pi/\tau$. Энергия функции вычислялась как сумма энергий гармоник:

$$\mathcal{E}_2 = 2\pi^2\tau \left[\left(\frac{r_1}{\tau_1}\right)^2 + \left(\frac{r_2}{\tau_1/2}\right)^2 + \left(\frac{r_3}{\tau_1/3}\right)^2 + \dots \right].$$



Фиг. 1. Теоретические кривые

a — пятая производная колокольного импульса; *б* — синусоида, затухающая по экспоненте; *в* — функция с постоянной амплитудой и линейной убывающей частотой



Фиг. 2. Участки сейсмограмм для гармонического анализа

a — на фоне длиннопериодной составляющей T_1 выделяется более высокочастотная T_2 ; *б* — высокочастотная составляющая вынесена вниз, пунктир внизу — длиннопериодная составляющая; *в* — анализ не захватывает высокочастотную составляющую, пунктиром соединены точки наблюдаемой кривой с ординатами разложения

Таблица 2

Сопоставление энергии колебаний, вычисленной путем аппроксимации и гармонического анализа для отрезка частотно-модулированной синусоиды (фиг. 1, в) и для нескольких отрезков сейсмограмм (фиг. 2)

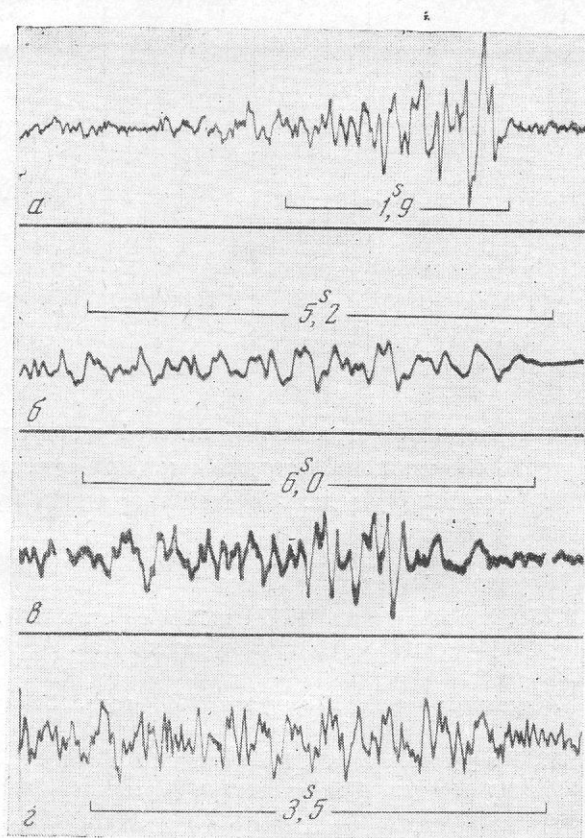
Кривая	Аппроксимация					Гармонический анализ				E/E_2
	A	T	τ	\mathcal{E}_i	\mathcal{E}	τ	ε_i	\mathcal{E}_{2i}	\mathcal{E}_2	
Фиг. 1, в	4,0	0,30	0,6	2120	2120	0,6	1,09 3,64 0,92 0,20 0,09 0,00	39 1750 252 21 7	2070	1,02
Фиг. 2, а	6,5 1,3	0,78 0,16	0,78 0,78	1080 1110	2190	0,78	5,9 0,84 0,80 0,30 0,81 0,30 0,04	890 72 147 39 1010 83 —	2240	0,97
Фиг. 2, б	3,3 1,56	0,23 0,09	0,46 0,46	1890 2640	4530	0,46	0,98 2,88 0,82 0,45 1,61 0,61	42 1435 264 141 2800 580	5262	0,86
Фиг. 2, в	4,35 0,40	0,34 0,04	0,67 0,67	2280 1325	3605	0,67	1,51 3,83 0,21 0,41 0,41 0,40 0,12 0,02	65 1435 117 79 125 172 22 1	2016	1,74

Практически при вычислении \mathcal{E}_2 мы ограничивались шестью-семью гармониками, отбрасывая остальные, если энергия, вносимая ими, составляла не более 1% от энергии, вносимой основной гармоникой.

Сопоставление энергии \mathcal{E} , вычисленной по формуле (2), с энергией \mathcal{E}_2 , вычисленной при помощи гармонического разложения, дано в табл. 2.

В одном из выбранных примеров (фиг. 2, в) различие между \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 оказалось большим. Остановимся на этом примере подробнее, так как он довольно характерен. Из фиг. 2, в видно, что высокочастотная компонента колебаний лежит за пределами разрешающей способности гармонического анализа по 24 ординатам, так как через выбранные ординаты можно

провести гладкую плавную кривую (пунктир на фиг. 2, в). В результате этого энергия колебаний, найденная по гармоническому разложению, практически равна энергии основного колебания, и не отражает энергии высокочастотного наложения. Между тем доля этого последнего в общей энергии не так уж мала и, как это следует из табл. 2, составляет в данном случае 37%.



Фиг. 3. Участки сейсмограмм близких землетрясений, для которых проделано разложение на анализаторе Худзинского (см. табл. 3)

Третье сопоставление проводилось для нескольких сейсмограмм сравнительно большой длительности, со значительным числом экстремумов, так что применять к ним гармонический анализ методом 24 ординат также было нельзя. Для этих примеров, изображенных на фиг. 3, спектр функций определялся на анализаторе Худзинского (1957), а затем по спектру с помощью теоремы Рейли вычислялась энергия колебаний \mathcal{E}_3 (табл. 3) (стр. 94).

Анализ данных, приведенных в таблицах, показывает, что при вычислении энергии колебаний путем аппроксимирования реальной сейсмограммы наложением отрезков синусоид с различными частотами и амплитудами удастся получить вполне достаточную точность — 10—30%.

Таблица 3

Сопоставление энергии колебаний, определенной путем аппроксимации и интегрирования спектра колебаний, полученного на анализаторе Худзинского

Кривая	Аппроксимация					ξ_1	ξ_1/ξ
	A	T	τ	$\frac{A^2}{T^2} \tau$	ξ		
Фиг. 3, а	5,2	0,25	1,3	562	1,1·10 ⁵	1,35·10 ⁵	1,22
	3,2	0,10	1,9	1950			
	1,2	0,03	1,9	3050			
Фиг. 3, б	3,1	0,43	5,2	270	1,14·10 ⁴	1,02·10 ⁴	0,89
	0,85	0,11	5,2	310			
Фиг. 3, в	5,0	0,31	3,0	780	7,45·10 ⁴	9,22·10 ⁴	1,24
	0,5	0,09	6,0	927			
	3,6	0,17	4,5	2020			
	3,5	0,55	1,2	48			
Фиг. 3, г	4,6	0,35	2,5	432	1,43·10 ⁵	0,99·10 ⁵	0,69
	3,5	0,08	3,5	6700			
	0,4	0,05	1,9	122			

Очень существенным моментом при этом является аккуратность в выделении высокочастотных компонент, которые даже при относительно малых амплитудах несут значительную долю общей энергии колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

- Белотелов В. Л., Вешняков Н. В. и Жиляев И. И. Установка для вычисления энергии упругих волн по сейсмограммам. Изв. АН СССР, отд. техн. наук., № 6, 1959.
- Голицын Б. Б. О землетрясении 18 февраля 1911 года. Соч., т. II. Изд-во АН СССР, 1960.
- Нерсесов И. Л., Раутиан Т. Г., Ризниченко Ю. В., Халтурин В. И. Инструкция по измерению динамических параметров близких землетрясений. Труды Ин-та физики Земли АН СССР, № 17 (184), 1961.
- Рыков А. В. Фотоэлектронный прибор для записи потока энергии сейсмических волн. Изв. АН СССР, серия геофиз., № 1, 1959.
- Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. II. ГИИТЛ, 1953.
- Уиттекер Э., Робинсон Г. Математическая обработка результатов наблюдений. Гостехиздат, 1933.
- Феофилактов В. Д. К инструментальному определению энергии сейсмических волн. Изв. АН СССР, серия геофиз., № 3, 1961.
- Харкевич А. А. Спектры и анализ. Гостехиздат, 1952.
- Худзинский Л. Л., Меламуд А. Я. Станция частотного анализа сейсмических колебаний. Изв. АН СССР, серия геофиз., № 9, 1957.